

TÍTULO: Sistema Geométrico-Analítico para el cálculo de la
Situación Astronómica mediante dos círculos de Iso-
alturas en Navegación Marítima (Método Marq-Chiner)

© AUTORES

Gregorio Damián CHINER VIVES
Santiago MARQUINA MURLANCH

EDITOR : Ramón ZARAGOZA BLASCO

.Calle.: Tiradors 8,39,29 D

.Población : 08003 BARCELONA

EDICIÓN: 1ª

FECHA DE PUBLICACIÓN : 7-11-86

DEPÓSITO LEGAL B. 38895 -1986.

IMPRESOR : IMPRÉS LAYETANA, 15 S.A.

. Calle: Via Layetana 15

. Población: 08003 BARCELONA

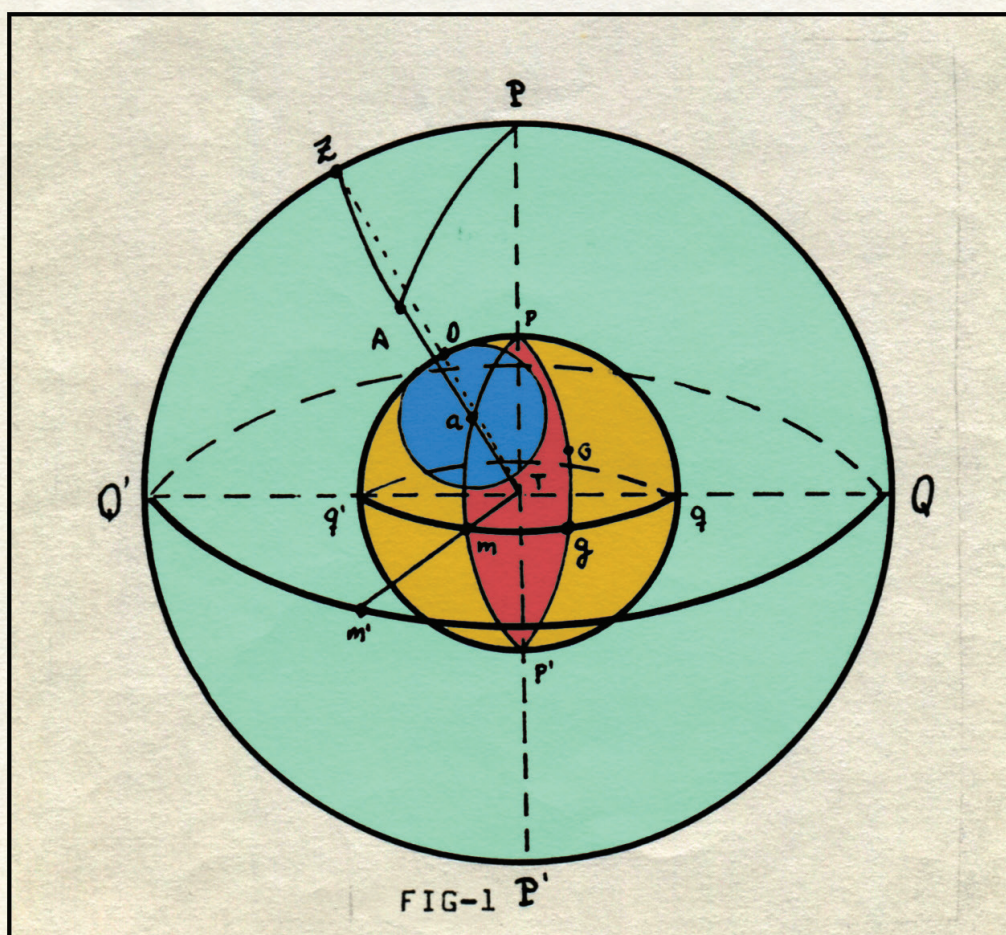
MÁQUINA FOTOCOPIADORA: Marca: KODAK

Modelo: EKTA PRINT - 200

Nº individual: 803-1353

≠ CIRCULOS DE ISOALTURAS: CONCEPTO Y APLICACION TEORICA

Supongamos un astro en la Esfera Celeste, en el punto A; su polo de iluminación es a sobre la superficie terrestre, concéntrica a la Esfera Celeste. Si hacemos centro en a con un radio esférico igual a la distancia zenital del astro en el momento de su observación, y trazamos un círculo menor OnO, sobre la circunferencia de este círculo, llamado Círculo de Alturas Iguales, tiene que estar el observador que midió la altura del astro, del cual se ha deducido esa distancia zenital; pues cualquier punto como el O, dista de a la distancia zenital z igual al complemento de la altura verdadera del astro; su zénit Z dista del astro $ZA = Oa = ATZ = 90 - a_v$, luego el observador que estuviera en O, si observa el astro, lo ve con la misma altura. (FIG-1)



La circunferencia de ese círculo es, pues, un lugar geométrico de la situación del buque.

Si, simultáneamente observamos otro astro A', y con el centro en su polo de iluminación a', se ha trazado también el círculo de alturas iguales, las circunferencias de ambos círculos se cortarán

generalmente en dos puntos suficientemente distantes, para que el observador pueda tomar como situación, el que esté más cercano a la situación estimada.

Las coordenadas terrestres del polo de iluminación a de un astro A se determinan fácilmente si al observar el astro se anota la hora de un cronómetro arreglado. La latitud de a es m_a , medida del ángulo aTm , o sea, también $m'A$, que es la declinación del astro corregida para la hora civil en Greenwich correspondiente al momento de la observación, deducida del cronómetro, y la longitud gm de a, es el horario del astro correspondiente al Primer Meridiano, que se obtiene fácilmente calculando con la altura del astro el horario de éste, $q'm$ con respecto al Meridiano Superior del lugar O y aplicándole convenientemente la misma longitud $q'g$ obtenida por el cálculo de la altura observada del astro. Conocidas las coordenadas terrestres del Polo de iluminación aay a, de los dos astros observados simultáneamente, si dispusiéramos a bordo de una esfera de las suficientes dimensiones, podríamos hacer la construcción gráfica expresada y obtener geométricamente la situación del buque.

Si las circunferencias de alturas iguales, o círculos de isoalturas, se cortan en dos puntos como es más frecuente, se puede tomar como situación el más próximo al punto de estima, o bien, marcar los dos astros y escoger posteriormente el punto desde el cual se ve a cada astro con su correspondiente azimuth. Tengamos en cuenta que si el observador está en O, el vertical del astro es ZA, luego Oa, radio esférico del punto O, es la dirección del azimuth del astro, luego los radios esféricos de ambos círculos que correspondan a la intersección donde estaba el buque, han de tener las direcciones de los azimutes de los astros en el momento de la observación.

Conviene añadir también, que un observador en O, punto de tangencia de su meridiano con la circunferencia de isoalturas, tiene el astro A en el vertical primario, pues siendo el radio esférico aO perpendicular a la circunferencia tangente pOq', el ángulo pOa será recto, e igual le ocurrirá al PZA, reproducción del anterior sobre la esfera celeste; y siendo recto el ángulo PZA, el azimuth del astro para ese

observador 0 cuyo zénit es Z, vale 90° ; luego el astro está en el vertical primario.

Si no se dispone de dos astros para observarlos simultáneamente como sucede de día, se pueden observar con un cierto intervalo, reduciendo los datos del primer círculo de isoalturas al lugar de observación del segundo astro, lo que se consigue mediante una sencilla estima directa. (FIG-2)

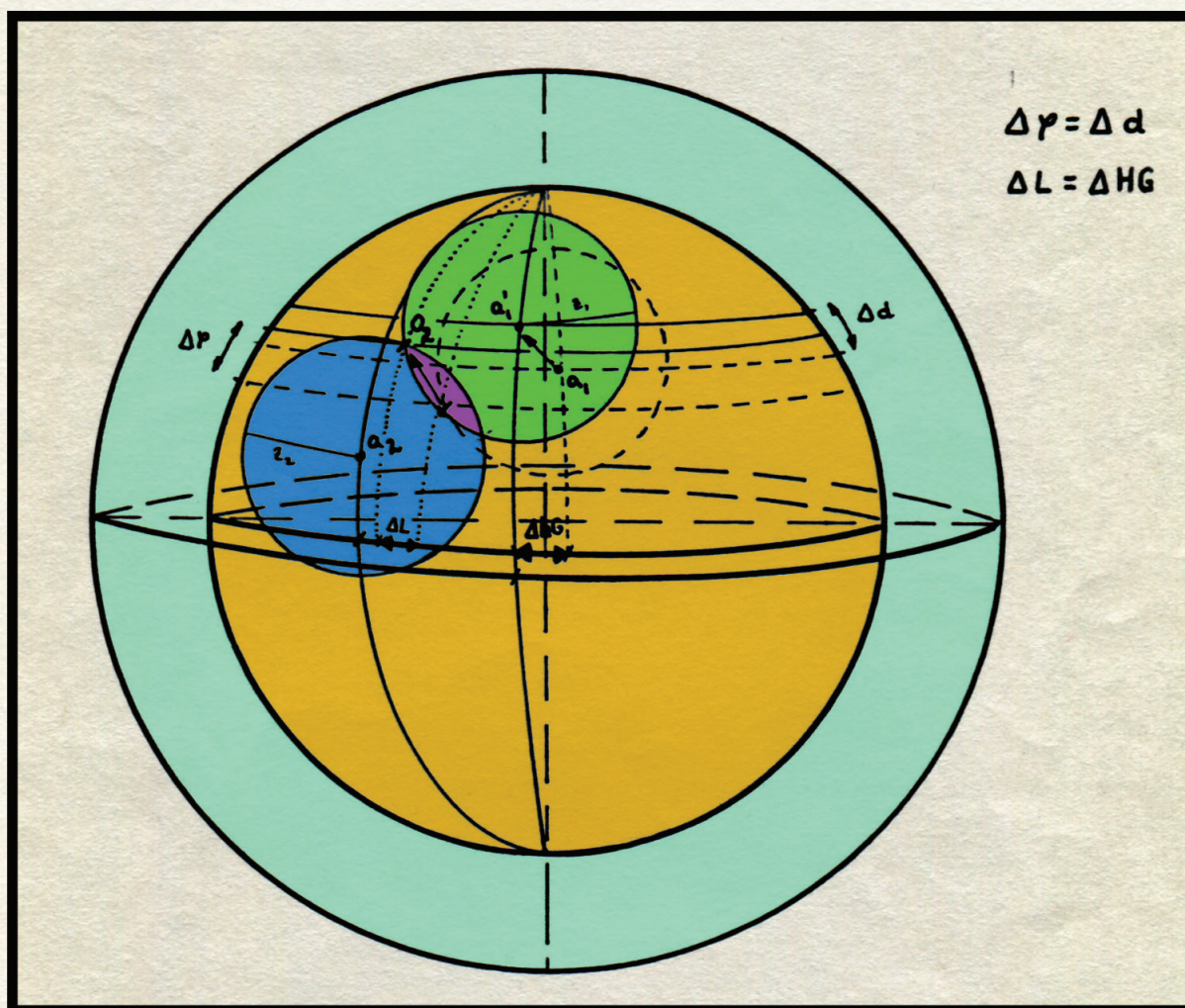


FIG-2

PRELIMINARES AL DESARROLLO DEL PRESENTE TRABAJO

Toda labor de investigación y aprendizaje debe ser estimulada por algún interés, que en ocasiones nace espontáneamente, aunque la mayoría de las veces lo hace por necesidades específicas dentro de una determinada área de trabajo. En nuestro caso interviene una mezcla de ambas que con el tiempo se nos llegó a plantear como un pequeño reto, como consecuencia del cual presentamos este modesto trabajo.

El planteamiento teórico estaba ahí, inmanente, su simplicidad nos sorprendió; pero la imposibilidad física de solucionarlo, tal y como se ofrecía, era obvia. Sería absurdo transportar una esfera de 7 m. de diámetro a bordo de los buques para trabajar sobre ella haciendo nuestros cálculos. Una reducción del tamaño de dicha esfera tampoco solucionaría el problema, pues el error cometido en los cálculos, y su imprecisión, obliga a deshechar la idea por su propio peso.

La solución al problema era simple geometría, puesto que en la geometría residía el obstáculo (dimensiones, espacio material, dificultad de trabajo etc.). Era pues necesario abordar el problema en su propia base geométrica, y desde un punto de vista de ella lo suficientemente preciso y rápido como para hacer rentable el esfuerzo.

La herramienta de trabajo la proporcionó la Geometría Analítica Euclídea aplicada al espacio tridimensional; nada más sencillo y directo. Con ella podemos crear una esfera de radio arbitrario, situada en un sistema de ejes convencional cartesiano, sobre la cual trazaremos círculos menores, mayores, y puntos. Sólo falta un método de doble transformación de coordenadas polares a cartesianas de modo que podamos situar en el espacio, y referidos al sistema de ejes adoptados, los puntos que representarán las posiciones de los astros, es decir, sus polos de iluminación. Posteriormente, en base a los datos obtenidos de los astros, se desarrollan ecuaciones que permiten la obtención de las coordenadas terrestres de las posibles situaciones del observador.

Era en aquél momento cuando había que hechar mano a la imaginación

buscando métodos, razonando; investigando a fin de cuentas. Hubo que analizar:

- ⌘ Posibilidades técnicas y materiales
- ⌘ Rapidez de los cálculos
- ⌘ Exactitud de los resultados

todo ello dentro del marco de conocimientos que puede poseer un estudiante universitario en un curso intermedio.

En atención a la herramienta de trabajo elegida, a los tres parámetros antes señalados, y a un factor nuevo del que seguidamente se hablará, se eligió como soporte adecuado al método un ordenador, hoy habitual en los puentes de los grandes buques mercantes para cálculos y análisis de estabilidad y esfuerzos en la carga. En cualquier caso el sistema es perfectamente aplicable a pequeños computadores programables de bolsillo.

El factor nuevo, antes señalado, resultaba coercitivo para la anterior elección. Este era lo abultado de los cálculos necesarios, que pese a su aparente sencillez y simetría en fórmulas no permitían ser reducidas mediante transformaciones trigonométricas simples.

Con el método que describimos no pretendemos poner en tela de juicio los métodos tradicionales de cálculo, es más, no podemos sino reconocer su exactitud y simplicidad dados los recursos operativos de que se disponía. Sin embargo, y atendiendo a las exigencias modernas de la navegación y a los medios de que se dispone hoy en día a bordo de los buques mercantes, podemos considerar el método que presentamos y desarrollamos como una ayuda más a la navegación; un sistema rápido y cómodo que permita al oficial situarse del modo "tradicional", pero utilizando las ventajas de la técnica moderna. Tal vez el planteamiento teórico no sea algo revolucionario ni novedoso; hemos de confesar que lo ignoramos; pero para nosotros tiene el mismo valor, por cuanto es el fruto de un trabajo totalmente original, del que no teníamos ninguna referencia escrita y que nace en base a los conocimientos adquiridos en los diversos campos a lo largo de nuestros tres cursos de carrera.

VENTAJAS DEL SISTEMA

El empleo del ordenador, en sí, es una ventaja en cuanto a la rapidez y exactitud de los cálculos; pero el fundamento teórico del problema tiene ventajas adicionales que no deben ser desdeñadas:

8 Por una parte, la cantidad de datos a utilizar es la mínima exigible. Con ello, las entradas en el A.N. son pocas, pues los horarios en Greenwich son obtenidos directamente para el Sol, Luna y planetas, haciendo sólo la pequeña interpolación por minutos y segundos de TU para la fecha de observación, y una corrección adicional por Diferencia para los casos de Luna y planetas. En el caso de las estrellas basta obtener el Angulo Sidereo que se sumará al horario en Greenwich de Aries, con lo que obtenemos el HG. Las declinaciones se obtienen con interpolaciones mínimas tanto para las estrellas como para los demás astros. Queremos en este punto hacer el inciso de que estamos trabajando en una idea para realizar una ampliación del Programa-objeto para que nos obtenga directamente las declinaciones y horarios de los astros en un momento determinado, con el fin de formar un bloque completo de cálculos, evitando las entradas en el A.N.

Un ejemplo de tipeos pueden ser los siguientes:

SOL

LUNA/PLANETAS

ESTRELLAS

HG =	d =	HG =	d =	HL =	d =
<u>. m/s =</u>	<u>C. m/s =</u>	<u>C. m/s =</u>	<u>C. m/s =</u>	<u>C. m/s =</u>	<u>C. m/s =</u>
HG _c =	d _c =	<u>C. dif =</u>	<u>C. dif =</u>	HL _c =	d _c =
		HG _c =	d _c =	<u>AS =</u>	
				HG =	

Las alturas observadas de los astros pueden ser corregidas opcionalmente por el Programa efectuando las siguientes entradas:

- Elevacion (metros): $\forall$ astro
- Semidiametro (minutos): caso del Sol
- Paralaje Horizontal Ecuatorial: caso de la Luna
- Corrección adicional: caso de Venus o Marte

8 No serán necesarias las observaciones en circunstancias favorables; sabido es que el cálculo de los determinantes Borda y Johnson exige para atenuar los errores, al sustituir la curva de isoalturas por una recta tangente en el punto determinante, que el azimut esté comprendido entre ciertos límites. Así, cuando el azimut tiene valores próximos a 0° o 180° , no es aconsejable el método Johnson; mientras que si el azimut tiene valores próximos a 90° o 270° , tampoco lo es el método Borda. Estas condiciones exigen tener a los astros en posiciones idóneas para la observación, siendo necesario hallar previamente la hora de circunstancias favorables próxima ó exacta. Posteriormente será de esperar que el cielo se encuentre despejado a la hora de tales circunstancias con el fin de que el astro sea perfectamente observable.

Con el sistema analítico que proponemos en este trabajo no es necesario considerar las circunstancias favorables, pues los puntos que determinan la situación del observador en uno de ellos sobre la esfera terrestre vienen dados por la intersección de auténticas circunferencias de isoalturas. Quiere ello decir que no hay sustitución de la curva por tangentes y, por consiguiente, los puntos resultantes serán el lugar exacto en que para los datos tomados (horarios y declinaciones) observaremos los dos astros con las alturas sobre el horizonte.

3 Esto plantea, ya de por sí, una ventaja sobre aquellos dos tipos de determinantes pues podremos observar cualquier astro, en cualquier instante, siempre y cuando se mantengan las normas generales para la observación con sextante, de las que se hablará más adelante.

8 Se tiene la posibilidad de observar astros en cualquier latitud, salvando el inconveniente que plantea el trabajo con Rectas de Altura en latitudes elevadas ya que, al margen de no disponer de cartas mercatorianas de los polos, sus proyecciones sobre la carta mercatoriana perderían su condición de rectas. De este modo se soluciona en parte la cues-

ción de la navegación en las proximidades de los polos, pues el cálculo será igualmente válido para cualquier latitud y longitud.

- 8 Es, quizás, la ausencia de sistemas y métodos gráficos lo que da un mayor rigor a los resultados. El trabajo con determinantes, rectas, ángulos y distancias siempre implica la introducción de pequeños errores, que junto a los de cálculo por aproximaciones en las interpolaciones, originan desplazamientos de la situación observada respecto a la verdadera. Además cabe el pequeño error cometido al sustituir un tramo de la circunferencia de isoalturas por su tangente en el pto. determinante. En el método aquí presentado no aparece teóricamente dicho error.
- 8 Es de resaltar también, que con este método el cálculo tradicional de Meridiana y Recta de Altura no es sino un caso más, y, puesto que en principio el horario del lugar no nos interesa, puede ocurrir que uno u ambos astros observados se encontraran en el meridiano superior o inferior, no afectando ello al proceso de cálculo. Queremos con esto resaltar que los horarios locales de los astros no nos van a resultar relevantes a la hora del cálculo, aunque en la última fase del Programa, y en atención a la posible utilización del mismo para el planteamiento o corrección de problemas, es calculado el horario local y el azimut de cada uno de los astros observados, en función de la latitud y longitud exactas previamente halladas.

≠ INCONVENIENTES DEL SISTEMA

La mayor desventaja que creemos tiene el Programa, de momento, es la de no poder utilizar simultáneamente un círculo de isoalturas y cualquier otra línea de posición. Este problema pensamos resolverlo próximamente incluyendo un bloque de alternativas diversas entre las que incluiremos la conversión de demoras loxodrómicas en círculos máximos determinados sobre la esfera terrestre por la intersección de un plano que pasa por el punto marcado ζ y que forma con su meridiano un ángulo μ igual a la demora inversa. También está claro que no se puede utilizar de modo alternativo como una sólo recta de altura, pero este tema escapa de momento a las intenciones de este trabajo, que en principio va más dirigido a la situación astronómica que a usos particulares, a los que, si nos es posible, en un futuro dirigiremos nuestras miras.

La imposibilidad de realizar a mano los cálculos requeridos para hallar la situación representa en principio una desventaja, por cuanto nos vemos obligados a disponer de un sistema como el ordenador que realice en tiempo real breve lo que a mano nos resultaría a todas luces largo y tedioso de ejecución.

≠ ELECCION DEL SISTEMA DE COORDENADAS

Como referíamos en los preliminares, trabajaremos en un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares. En él cada punto del espacio viene determinado por sus tres coordenadas (x, y, z) .

Consideraremos los tres ejes X, Y, Z de la figura 3. Con el fin de simplificar los cálculos supondremos el centro de la esfera que vamos a utilizar, situado en el origen $O (0, 0, 0)$. Además, como tal esfera puede tener un radio arbitrario, tomaremos el más sencillo posible, la unidad, con objeto de obtener la máxima simplicidad ecuacional.

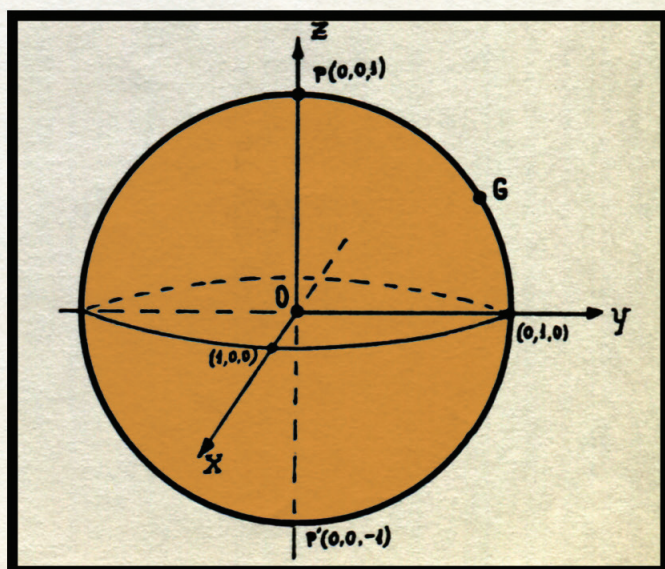


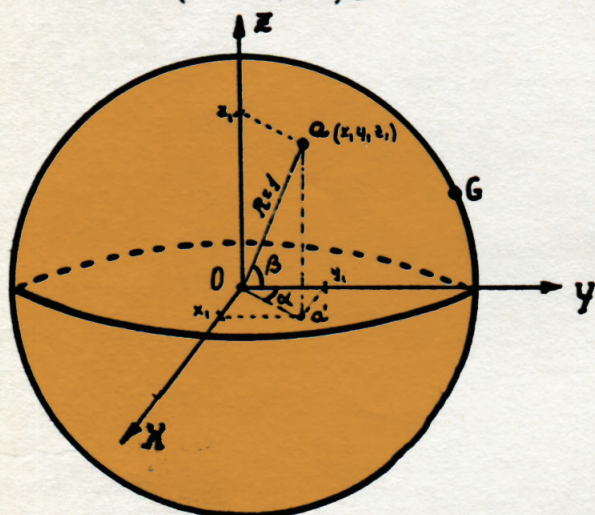
FIG. 3

En estas condiciones, el Ecuador se encuentra sobre el plano XY. Sobre esta esfera se trabajará tanto con coordenadas terrestres como con las de los cuerpos celestes, y convendremos, asimismo, que el meridiano de Greenwich se encuentra en el círculo máximo determinado por la intersección del plano ZY con la esfera, considerado en sus puntos de coordenada Y positiva. Los polos Norte y Sur se corresponden respectivamente a los puntos P ($\emptyset, \emptyset, 1$) y P'($\emptyset, \emptyset, -1$).

La ecuación de una esfera en las condiciones referidas es:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = \emptyset \quad (1)$$

Hemos de situar sobre ella los polos de iluminación a en función de sus coordenadas declinación y horario respecto al primer meridiano (FIG.4).



El valor de las coordenadas cartesianas de los polos de iluminación en función de los ángulos α y β que se corresponden respectivamente con HG y d de los astros serán del modo:

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= \text{sen } d_1 \\ x_1 &= \cos d_1 \text{ sen } HG_1 \\ y_1 &= \cos d_1 \cos HG_1 \end{aligned} \right\} \text{ a } (x_1, y_1, z_1)$$

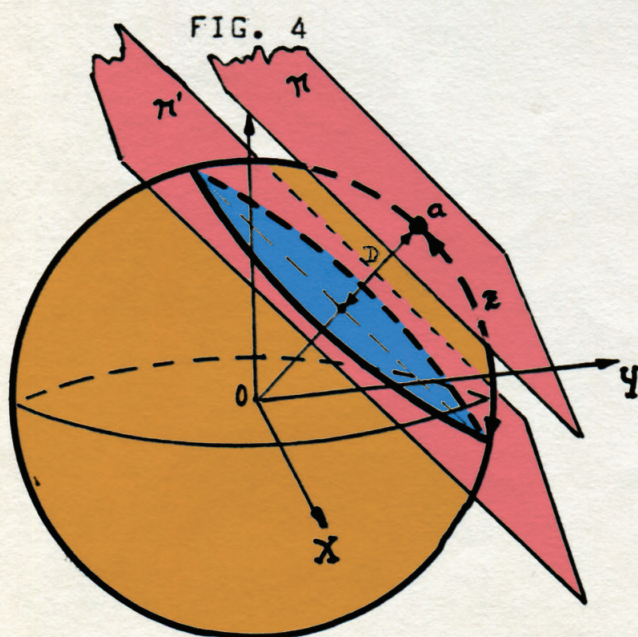


FIG.5

Para el trazado de los círculos de isoalturas, es necesaria la obtención de un plano que sea paralelo a otro tangente a la esfera en el polo de iluminación, pero trasladado una distancia D que será función de la distancia zenital $90^\circ - a_v$ y en el sentido hacia el origen de coordenadas. La ecuación del plano tangente a una curva se obtiene mediante la suma de las derivadas parciales respecto a cada variable en dicho punto multiplicadas por la variable respecto a la cual se derivó.

De esta manera, poniendo

la ecuación (1) en forma homogénea (incluyendo un parámetro t en el término independiente) y derivando parcialmente obtendremos:

$$x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0$$

$$f'(x_1) = 2x_1 \quad f'(y_1) = 2y_1 \quad f'(z_1) = 2z_1 \quad f'(t) = -2t$$

(en los valores anteriores hemos particularizado para el punto (x_1, y_1, z_1)).

La ecuación del plano tangente en tal punto será, en consecuencia:

$$xx_1 + yy_1 + zz_1 - t = 0$$

Este plano deberá ser trasladado una distancia D hacia el origen de coordenadas. El valor D en función de la distancia zenital

será $D = R - R' = R - \cos(90^\circ - a_v) = R - \sin a_v$ y siendo $R = 1$

$$D = 1 - \sin a_v$$

(ver figura 6).

La ecuación del nuevo plano buscado será, en resumen, de la forma:

$$xx_1 + yy_1 + zz_1 - \sin a_v = 0$$

Para otro astro de coordenadas cartesianas (x_2, y_2, z_2) , la ecuación del plano que determinará otro círculo de isoalturas en su intersección con la esfera será:

$$xx_2 + yy_2 + zz_2 - \sin a_2 = 0$$

Las ecuaciones de ambos planos junto con la de la esfera, nos determinan un sistema de tres ecuaciones algebraicas con tres incógnitas y doble solución en dada una de ellas. Las coordenadas cartesianas de los dos puntos determinados, transformadas mediante un sistema de conversión similar al de entrada, referido esta vez a la esfera terrestre, nos fijará sobre ésta las dos posibles situaciones del observador.

Sólo hay entonces que deshacer el ovillo, es decir, obtener las coordenadas terrestres de los puntos dados en función de las cartesianas. Así:

$$z = \sin \varphi$$

$$x = \cos \varphi \sin L \quad ; \quad y = \cos \varphi \cos L$$

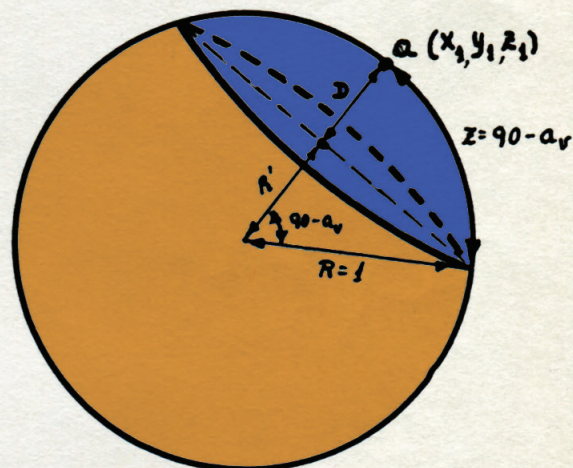


FIG.6

≠ OBTENCION DE LA FORMULA DE LA LATITUD

Con las ecuaciones deducidas anteriormente planteamos el siguiente sistema:

$$xx_1 + yy_1 + zz_1 - \text{sen } a_1 = 0$$

$$xx_2 + yy_2 + zz_2 - \text{sen } a_2 = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

El sistema lo resolveremos de la siguiente manera. Utilizando las dos primeras ecuaciones obtendremos el valor de las incógnitas x e y en función de z . Para ello trabajaremos eliminando en cada caso la incógnita conveniente.

$$y_2 \cdot (xx_1 + yy_1 + zz_1 = \text{sen } a_1)$$

$$!!! - y_1 \cdot (xx_2 + yy_2 + zz_2 = \text{sen } a_2)$$

$$\begin{aligned} \text{sumando : } & x(x_1y_2 - x_2y_1) + z(z_1y_2 - z_2y_1) = \text{sen } a_1y_2 - \text{sen } a_2y_1 \\ & (\text{sen } a_1y_2 - \text{sen } a_2y_1) - z(z_1y_2 - z_2y_1) \\ x = & \frac{\quad}{(x_1y_2 - x_2y_1)} \end{aligned} \quad (2)$$

$$x_2 \cdot (xx_1 + yy_1 + zz_1 = \text{sen } a_1)$$

$$!!! - x_1 \cdot (xx_2 + yy_2 + zz_2 = \text{sen } a_2)$$

$$\begin{aligned} \text{sumando : } & y(y_1x_2 - y_2x_1) + z(z_1x_2 - z_2x_1) = \text{sen } a_1x_2 - \text{sen } a_2x_1 \\ & (\text{sen } a_1x_2 - \text{sen } a_2x_1) - z(z_1x_2 - z_2x_1) \\ y = & \frac{\quad}{(y_1x_2 - y_2x_1)} \end{aligned} \quad (3)$$

Elevando al cuadrado los dos términos de las igualdades (2) y (3) obtendremos las expresiones $x^2 = f(z)$ y $y^2 = f'(z)$, las cuales sustituiremos en la ecuación de la esfera (1). Teniendo en cuenta que los denominadores de x^2 e y^2 son equivalentes obtenemos:

$$[(\text{sen } a_1y_2 - \text{sen } a_2y_1) - z(z_1y_2 - z_2y_1)]^2 + [(\text{sen } a_1x_2 - \text{sen } a_2x_1) - z(z_1x_2 - z_2x_1)]^2 + (z^2 - 1)(x_1y_2 - x_2y_1)^2 = 0$$

Fórmula que desarrollada y agrupando términos nos da una ecuación en grado dos de la forma:

$$\begin{aligned} & z^2 [(z_1y_2 - z_2y_1)^2 + (z_1x_2 - z_2x_1)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2] + \\ & + \{ - 2z [(\text{sen } a_1y_2 - \text{sen } a_2y_1)(z_1y_2 - z_2y_1) + (\text{sen } a_1x_2 - \text{sen } a_2x_1)(z_1x_2 - \\ & - z_2x_1)] \} + [(\text{sen } a_1y_2 - \text{sen } a_2y_1)^2 + (\text{sen } a_1x_2 - \text{sen } a_2x_1)^2 - \\ & - (x_1y_2 - x_2y_1)^2] = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{y siendo: } z_1 &= \text{sen } d_1 & z_2 &= \text{sen } d_2 \\
 y_1 &= \text{cos } d_1 \text{cos } HG_1 & y_2 &= \text{cos } d_2 \text{cos } HG_2 \\
 x_1 &= \text{cos } d_1 \text{sen } HG_1 & x_2 &= \text{cos } d_2 \text{sen } HG_2
 \end{aligned}$$

las coordenadas de los astros, que substituidas darán:

$$\begin{aligned}
 (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 &= (\text{cos } d_1 \text{sen } h_1 \text{cos } d_2 \text{cos } h_2 - \text{cos } d_2 \text{sen } h_2 \text{cos } d_1 \text{cos } h_1)^2 = \\
 &= \text{cos}^2 d_1 \text{cos}^2 d_2 (\text{sen } h_1 \text{cos } h_2 - \text{sen } h_2 \text{cos } h_1)^2 = \text{cos}^2 d_1 \text{cos}^2 d_2 \text{sen}^2 (h_1 - h_2) \quad (4) \\
 (z_1 x_2 - z_2 x_1)^2 &= (\text{sen } d_1 \text{cos } d_2 \text{sen } h_2 - \text{sen } d_2 \text{cos } d_1 \text{sen } h_1)^2 = \\
 &= \text{sen}^2 d_1 \text{cos}^2 d_2 \text{sen}^2 h_2 + \text{sen}^2 d_2 \text{cos}^2 d_1 \text{sen}^2 h_1 - 2 \text{sen } d_1 \text{sen } d_2 \text{cos } d_1 \text{cos } d_2 \text{sen } h_1 \text{sen } h_2 \\
 (z_1 y_2 - z_2 y_1)^2 &= (\text{sen } d_1 \text{cos } d_2 \text{cos } h_2 - \text{sen } d_2 \text{cos } d_1 \text{cos } h_1)^2 = \\
 &= \text{sen}^2 d_1 \text{cos}^2 d_2 \text{cos}^2 h_2 + \text{sen}^2 d_2 \text{cos}^2 d_1 \text{cos}^2 h_1 - 2 \text{sen } d_1 \text{sen } d_2 \text{cos } d_1 \text{cos } d_2 \text{cos } h_1 \text{cos } h_2
 \end{aligned}$$

Sumando los tres términos anteriores, sacando factores común y teniendo en cuenta que: $\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$
 $\text{cos } h_1 \text{cos } h_2 + \text{sen } h_1 \text{sen } h_2 = \text{cos } (h_1 - h_2)$

Obtendremos el coeficiente de z en segundo grado:

$$* \quad [(\text{cos } d_1 \text{cos } d_2 \text{sen } (h_1 - h_2))^2 + (\text{sen } d_2 \text{cos } d_1)^2 + (\text{cos } d_2 \text{sen } d_1)^2 - 2 \text{sen } d_1 \text{sen } d_2 \text{cos } d_1 \text{cos } d_2 \text{cos } (h_1 - h_2)] \quad (A)$$

En el término de z en primer grado tenemos:

$$\begin{aligned}
 -2 (\text{sen } a_1 y_2 - \text{sen } a_2 y_1)(z_1 y_2 - z_2 y_1) &= (\text{sen } a_1 \text{cos } d_2 \text{cos } h_2 - \text{sen } a_2 \text{cos } d_1 \text{cos } h_1)(\text{sen } d_1 \text{cos } d_2 \text{cos } h_2 - \\
 &\quad - \text{sen } d_2 \text{cos } d_1 \text{cos } h_1) \cdot (-2) \\
 -2 (\text{sen } a_1 x_2 - \text{sen } a_2 x_1)(z_1 x_2 - z_2 x_1) &= (\text{sen } a_1 \text{cos } d_2 \text{sen } h_2 - \text{sen } a_2 \text{cos } d_1 \text{sen } h_1)(\text{sen } d_1 \text{cos } d_2 \text{sen } h_2 - \\
 &\quad - \text{sen } d_2 \text{cos } d_1 \text{sen } h_1) \cdot (-2)
 \end{aligned}$$

Operando los paréntesis, usumando y simplificando dará:

$$* \quad [(\text{sen } (2d_1) \text{sen } a_2 \text{cos } d_2 + \text{sen } (2d_2) \text{sen } a_1 \text{cos } d_1) \cdot \text{cos } (h_1 - h_2) - 2 (\text{sen } a_2 \text{sen } d_2 \text{cos}^2 d_1 + \text{sen } a_1 \text{sen } d_1 \text{cos}^2 d_2)] \quad (B)$$

En el término independiente tenemos calculado (4)

y además:

$$\begin{aligned}
 (\text{sen } a_1 y_2 - \text{sen } a_2 y_1)^2 &= (\text{sen } a_1 \text{cos } d_2 \text{cos } h_2)^2 - 2 \text{sen } a_1 \text{sen } a_2 \text{cos } d_1 \text{cos } d_2 \text{cos } h_1 \text{cos } h_2 + (\text{sen } a_2 \text{cos } d_1 \text{cos } h_1)^2 \\
 (\text{sen } a_1 x_2 - \text{sen } a_2 x_1)^2 &= (\text{sen } a_1 \text{cos } d_2 \text{sen } h_2)^2 - 2 \text{sen } a_1 \text{sen } a_2 \text{cos } d_1 \text{cos } d_2 \text{sen } h_1 \text{sen } h_2 + (\text{sen } a_2 \text{cos } d_1 \text{sen } h_1)^2
 \end{aligned}$$

Sumando los dos términos anteriores y restándoles (4)

obtenemos:

$$* \quad [-2 \text{sen } a_1 \text{sen } a_2 \text{cos } d_1 \text{cos } d_2 \text{cos } (h_1 - h_2) + (\text{sen } a_1 \text{cos } d_2)^2 + (\text{sen } a_2 \text{cos } d_1)^2 - (\text{cos } d_1 \text{cos } d_2 \text{sen } (h_1 - h_2))^2] \quad (C)$$

y la ecuación será del modo

$$(A)Z^2 + (B)Z + (C) = 0 \quad \text{de donde:}$$

$$Z = \text{sen } \varphi_0 = \frac{-(B) \pm \sqrt{(B)^2 - 4(A)(C)}}{2(A)}$$

Del análisis del discriminante $\Delta = (B)^2 - 4(A)(C)$ deducimos el número de posibles soluciones al problema:

$\Delta > 0$: dos soluciones reales. Los dos círculos son secantes.

$\Delta = 0$: solución real única. Los dos círculos son tangentes.

$\Delta < 0$: dos soluciones imaginarias. Ambos círculos de iso-alturas son exteriores, y por tanto, la solución no existe. Si en la práctica se diera este caso demostraría un error en alguno de los datos de los astros.

En el primero de los casos, se tomará como posición del observador la más cercana al punto de estima, siendo este último el trasladado si las observaciones no han sido simultáneas.

Una vez calculada la latitud la utilizaremos para el cálculo de la Longitud.

≠ OBTENCION DE LA LONGITUD

Discriminada la latitud observada procederemos al cálculo de la longitud sustituyéndola en las fórmulas (2) y (3) por $z = \text{sen } \varphi$ con lo que hallaremos las coordenadas cartesianas x e y . Sustituyendo las coordenadas cartesianas de los astros por sus valores en función de declinaciones y horarios tendremos:

$$x = \frac{\cos h_2 \cos d_2 (\text{sen } a_1 - \text{sen } d_1 \text{ sen } \varphi_0) - \cos h_1 \cos d_1 (\text{sen } a_2 - \text{sen } d_2 \text{ sen } \varphi_0)}{\cos d_1 \cos d_2 \text{ sen } (h_1 - h_2)}$$

$$y = \frac{\text{sen } h_2 \cos d_2 (\text{sen } a_1 - \text{sen } d_1 \text{ sen } \varphi_0) - \text{sen } h_1 \cos d_1 (\text{sen } a_2 - \text{sen } d_2 \text{ sen } \varphi_0)}{\cos d_1 \cos d_2 \text{ sen } (h_1 - h_2)}$$

La longitud la obtendremos en base a estas coordenadas de la siguiente manera:

$$L_0 = \left| \text{ARCTAN } \frac{x}{y} \right|$$

Para conocer si la longitud L_0 está al este o al oeste de Greenwich analizaremos los signos de x e y ;

- Si $x > 0$: Longitud occidental (W)
- Si $x < 0$: " oriental (E)
- Si $y < 0$: El valor de la longitud será el comprendido entre 90° y 180°
- Si $y > 0$: La longitud estará comprendida entre 0° y 90°

Un indicador que nos demuestra la exactitud de los resultados es la sustitución de las coordenadas cartesianas terrestres (x,y,z) en la ecuación (1), comprobándose la esfericidad de las mismas. En los distintos ejemplos que hemos realizado el máximo error detectado en la esfericidad ha sido de 1×10^{-8} , comprobándose la exactitud de los cálculos ya que en dichas condiciones podemos considerar al punto perfectamente situado sobre la esfera.

En Barcelona a 30 de Mayo de 1986 (Festividad de San Fernando

Gregorio Chiner Vives

Santiago Marquina Murlanch

+++++